

Leçon 4.2 – Exemples Oscillateur 1D Permanent Périodique

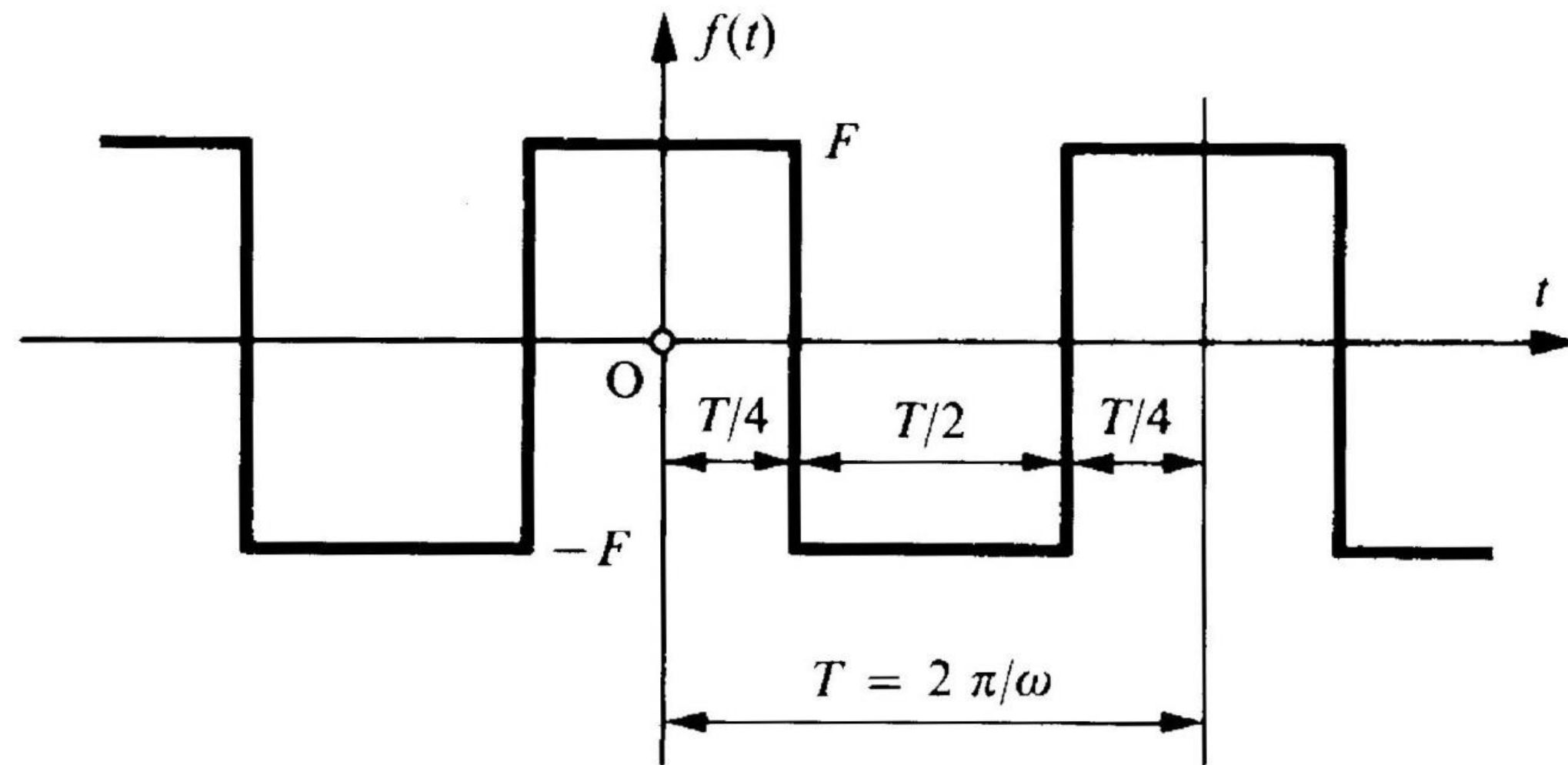
ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

- 2 Exemples
- Force carrée
- Battement de 2 fréquences

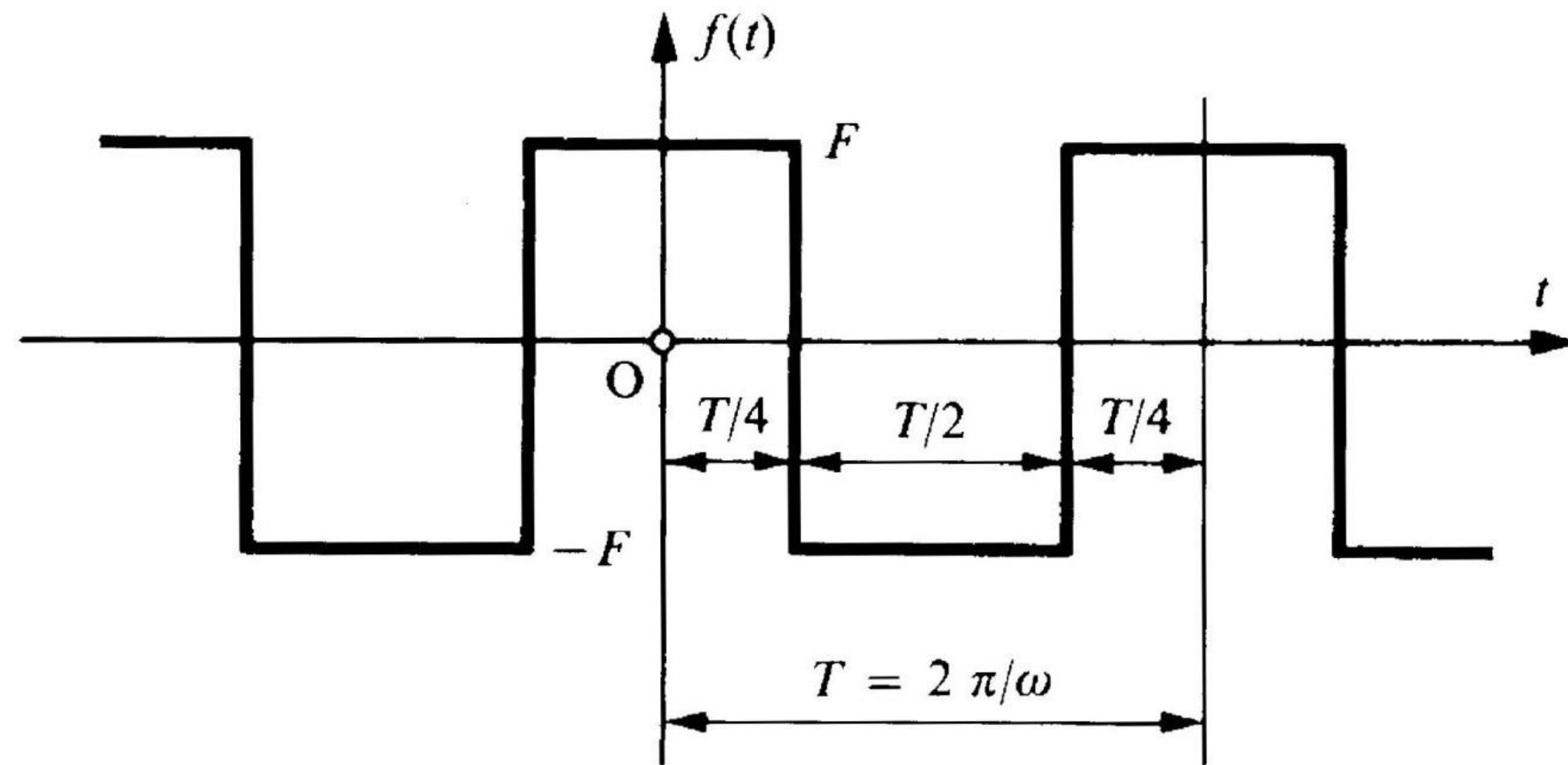
EPFL Exemple 4.1 – Force carrée (cf. 5.3.2 livre)

- (a) $\omega = \frac{\omega_0}{0.8}; \eta = 0.05$
- (b) $\omega = \frac{\omega_0}{5.3}; \eta = 0.05$



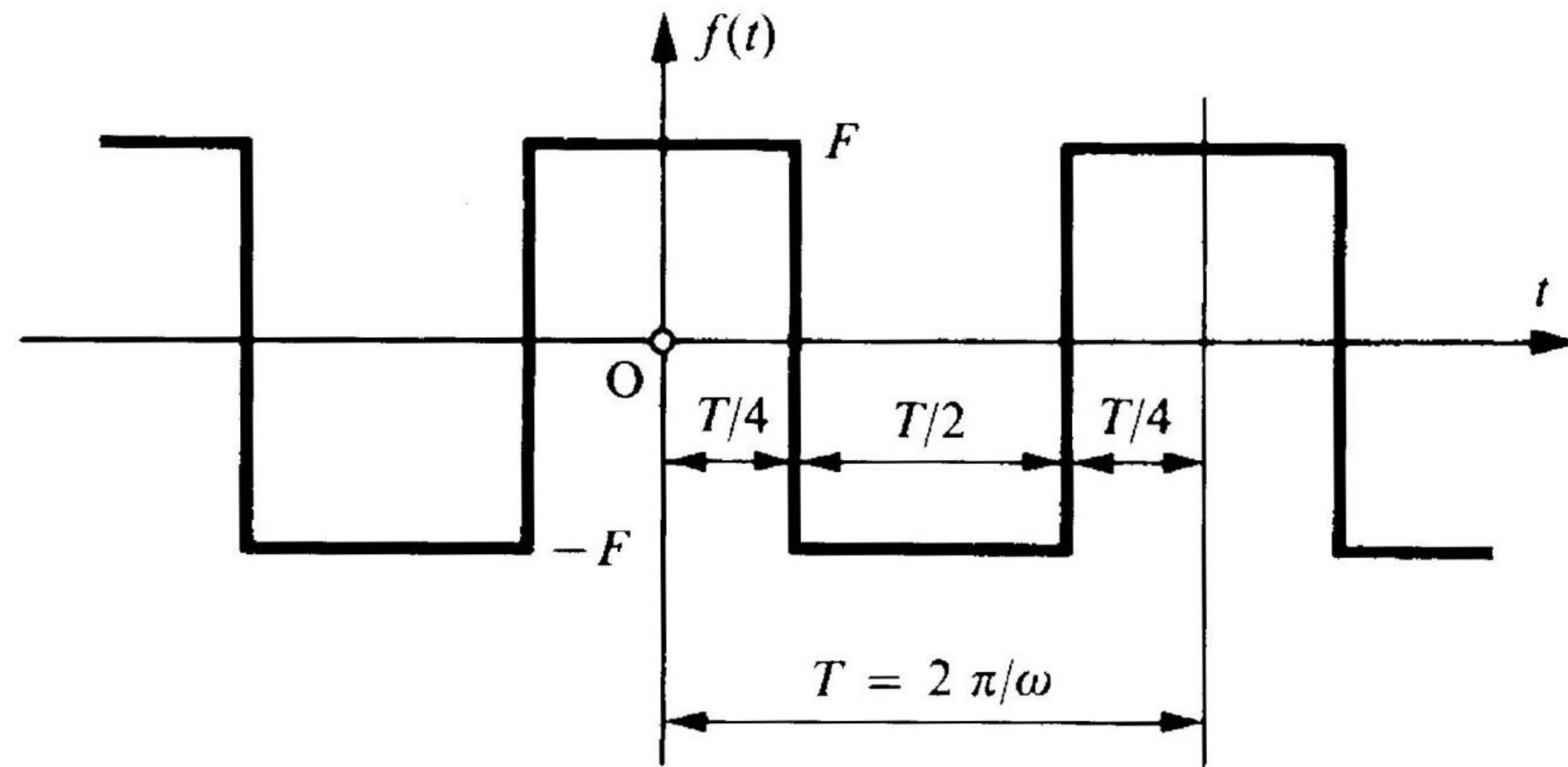
EPFL Exemple 4.1 – Force carrée (cf. 5.3.2 livre)

- (a) $\omega = \frac{\omega_0}{0.8}; \eta = 0.05$
- (b) $\omega = \frac{\omega_0}{5.3}; \eta = 0.05$

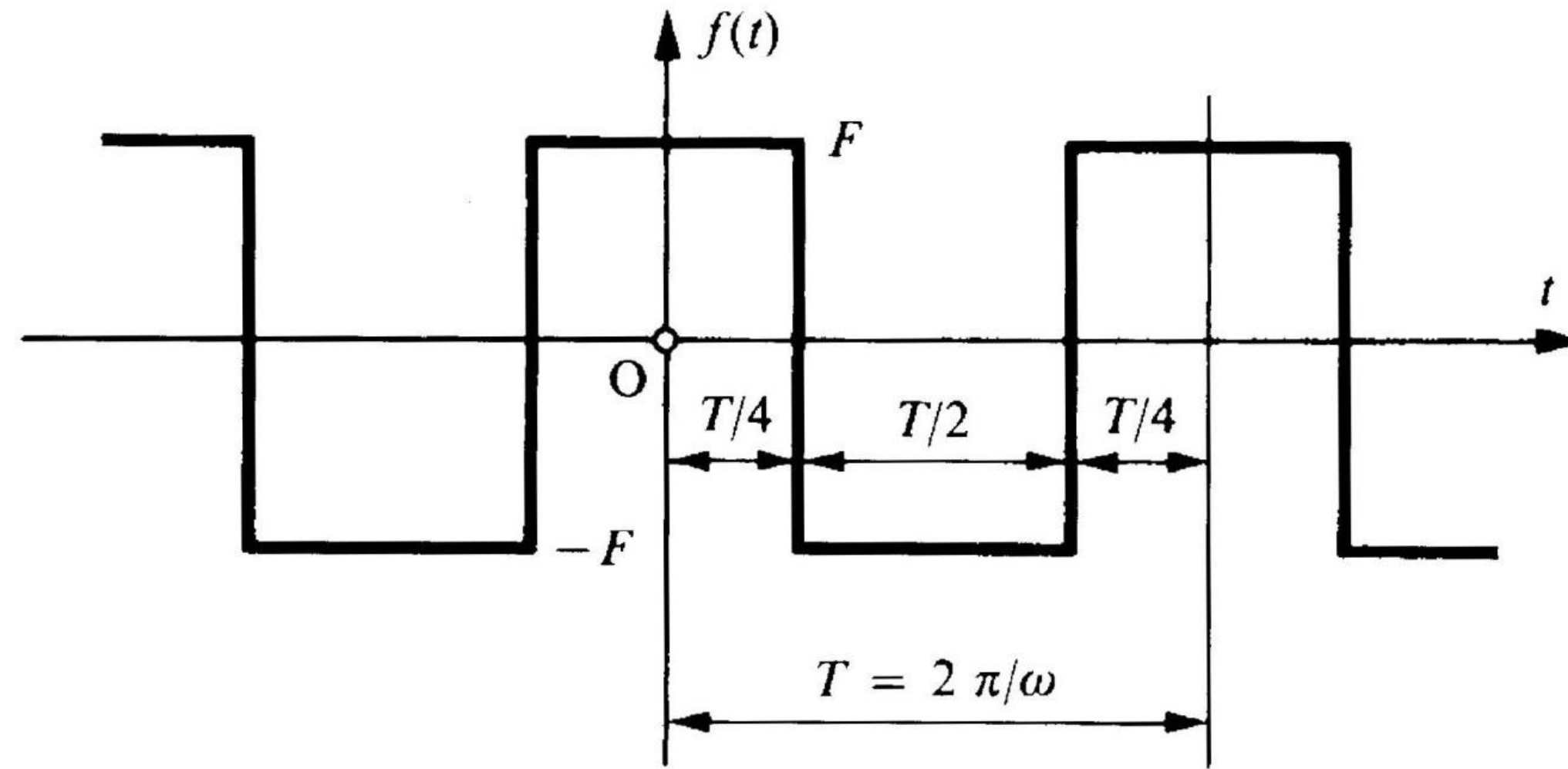


EPFL Exemple 4.1 – Force carrée (cf. 5.3.2 livre)

- (a) $\omega = \frac{\omega_0}{0.8}; \eta = 0.05$
- (b) $\omega = \frac{\omega_0}{5.3}; \eta = 0.05$



EPFL Exemple 4.1 – Force carrée (cf. 5.3.2 livre)



Coefficients de la série de Fourier pour la force rectangulaire périodique

$$F_0 = 0 \quad B_n = 0 \quad \psi_n = 0$$

$$\Rightarrow A_n = F_n$$

$$= F \frac{4}{n \pi} \sin \frac{n \pi}{2}$$

$$= 0 \quad \text{si } n \text{ pair} \quad (5.29)$$

Série de Fourier de la force rectangulaire périodique

$$f(t) = \sum_n^{\infty} F_n \cos n \omega t \quad (5.30)$$

avec

$$F_n = F \frac{4}{n \pi} \sin \frac{n \pi}{2} \quad (5.31)$$

EPFL Exemple 4.1 – Force carrée (cf. 5.3.2 livre)

Solution *permanente* (superposition des harmonique)

$$x(t) = \sum_n^{\infty} X_n \cos(n \omega t - \varphi_n) \quad (5.32)$$

avec

$$\begin{aligned} X_n &= X_{sn} \mu_n \\ &= \frac{F_n}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - n^2 \beta^2)^2 + 4 \eta^2 n^2 \beta^2}} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Amplitude relative du mouvement lié à l'harmonique n

$$\frac{X_n}{\delta} = \frac{4}{n \pi} \frac{\sin \frac{n \pi}{2}}{\sqrt{(1 - n^2 \beta^2)^2 + 4 \eta^2 n^2 \beta^2}} \quad (5.34)$$

avec $\delta = F/k$

EPFL Exemple 4.1 – Force carrée (cf. 5.3.2 livre)

Données numériques

$$(a) \quad \omega_0 = 0,8 \, \omega \quad \eta = 0,05$$

$$(b) \quad \omega_0 = 5,3 \, \omega \quad \eta = 0,05$$

Amplitude relative pour le cas a)

$$\omega_0 = 0,8 \, \omega \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0} = 1,25 \quad \eta = 0,05$$

$$\frac{X_n}{\delta} = \frac{4}{n \pi} \left(\left(1 - 1,5625 \, n^2 \right)^2 + 1,563 \cdot 10^{-2} \, n^2 \right)^{-1/2}$$

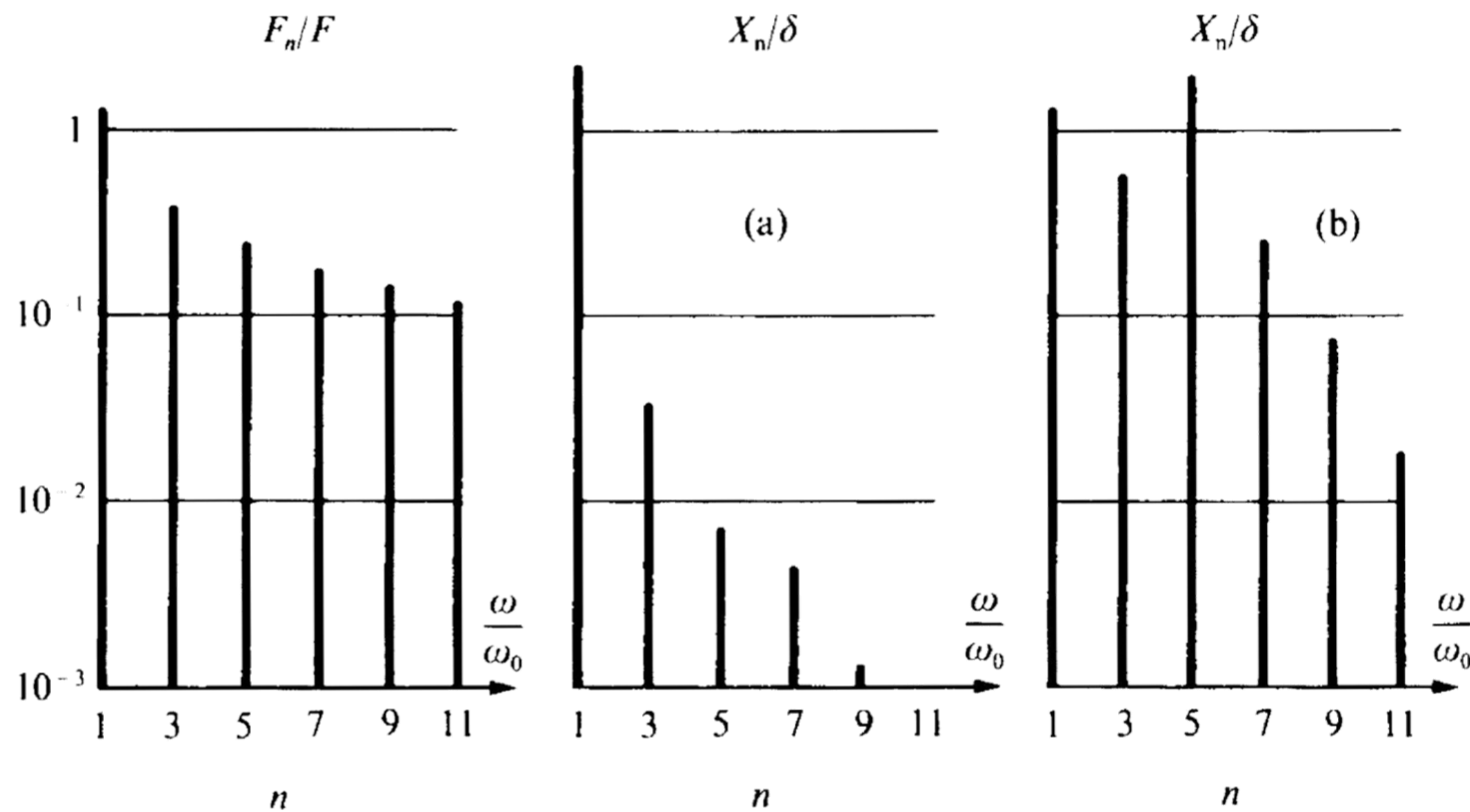
Amplitude relative pour le cas b)

$$\omega_0 = 5,3 \, \omega \quad \Rightarrow \quad \beta = 0,1887 \quad \eta = 0,05$$

$$\frac{X_n}{\delta} = \frac{4}{n \pi} \left(\left(1 - 3,56 \cdot 10^{-2} \, n^2 \right)^2 + 3,56 \cdot 10^{-4} \, n^2 \right)^{-1/2}$$

EPFL Exemple 4.1 – Force carrée (cf. 5.3.2 livre)

n	1	3	5	7	9
F_n/F	1,2732	0,4244	0,2546	0,1819	0,1415
(a) X_n/δ	2,2096	0,0325	0,0067	0,0024	0,0011
(b) X_n/δ	1,3200	0,6224	1,7572	0,2406	0,0748



EPFL Exemple 4.1 – Force carrée (cf. 5.3.2 livre)

Réponse permanente *complexe*

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \frac{D_0}{k} + \sum_n \underline{x}_n(t) = \sum_n \underline{x}_n(t) \quad (D_0 = 0) \\ &= \sum_n \underline{Y}_n \underline{D}_n e^{jn\omega t} = \sum_n \underline{X}_n e^{jn\omega t}\end{aligned}$$

$$\underline{X}_n = \frac{F_n}{k} \frac{e^{-j\varphi_n}}{\sqrt{(1 - n^2 \beta^2)^2 + 4 \eta^2 n^2 \beta^2}}$$

Amplitude de rang n

$$X_n = F \frac{4}{k n \pi} \sin \frac{n \pi}{2} \frac{1}{\sqrt{(1 - n^2 \beta^2)^2 + 4 \eta^2 n^2 \beta^2}}$$

Réponse *complexe* du système

$$\underline{x}(t) = \sum_n F \frac{4}{k n \pi} \sin \frac{n \pi}{2} \frac{e^{j(n\omega t - \varphi_n)}}{\sqrt{(1 - n^2 \beta^2)^2 + 4 \eta^2 n^2 \beta^2}}$$

Réponse du système

$$x(t) = \sum_n F \frac{4}{k n \pi} \sin \frac{n \pi}{2} \frac{\cos(n\omega t - \varphi_n)}{\sqrt{(1 - n^2 \beta^2)^2 + 4 \eta^2 n^2 \beta^2}}$$

EPFL Exemple 4.2 – Battement permanent (5.3.1 livre)

Deux forces harmoniques d'amplitudes et pulsations *voisines*

$$f'(t) = F' \cos \omega' t$$

$$f''(t) = F'' \cos \omega'' t$$

EPFL Exemple 4.2 – Battement permanent (5.3.1 livre)

Deux forces harmoniques d'amplitudes et pulsations *voisines*

$$f'(t) = F' \cos \omega' t$$

$$f''(t) = F'' \cos \omega'' t$$

Déplacement résultant : *battement en régime permanent*

$$x = X' \cos(\omega' t - \varphi') + X'' \cos(\omega'' t - \varphi'') \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (X' + X'') (\cos(\omega' t - \varphi') + \cos(\omega'' t - \varphi'')) \\ &+ \frac{1}{2} (X' - X'') (\cos(\omega' t - \varphi') - \cos(\omega'' t - \varphi'')) \\ &= (X' + X'') \cos(\omega t - \varphi) \cdot \cos(\alpha t - \psi) \\ &- (X' - X'') \sin(\omega t - \varphi) \cdot \sin(\alpha t - \psi) \quad (5.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} (\omega' + \omega'') & \alpha &= \frac{1}{2} (\omega' - \omega'') \\ \varphi &= \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') & \psi &= \frac{1}{2} (\varphi' - \varphi'') \end{aligned} \quad (5.27)$$

EPFL Exemple 4.2 – Battement permanent (5.3.1 livre)

Données numériques

$$\omega = 50 \text{ s}^{-1} \quad \alpha = 3,5 \text{ s}^{-1} \quad \varphi = 0,4 \quad \psi = 0,1$$

$$\text{Cas (a)} \quad X' = 0,7 \quad X'' = 0,3$$

$$\text{Cas (b)} \quad X' = X'' = 0,5$$

$$\Rightarrow X' + X'' = 1,0$$

